P. 2   Variables aleatorias

HOJA N°   1°C 2019
FECHA   2019 - 1°C

① Para cada v.a. definida a continuación, indicar el recorrido y clasificarla:

a) Q: "número de estudiantes en la lista de un curso en particular, que estén ausentes el 1° día de clases de los 20 inscriptos"

$R(Q) = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 20\}$ ✓

b) R: "tiempo de espera en una caja de un banco antes de ser atendido"

$R(R) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 5, \text{horas}\}$ ✓   horario banco: 10 a 15
5 horas

c) S: "Temperatura máxima y mínima medida en la estación meteorológica de La Plata un día cualquiera del año"

(X) $R(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$

d) T: "Cant. de bicicletas en stock en una bicicletería al finalizar un día de la semana si comenzó la semana con 120 unidades y no realizó repo."

$R(T) = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \leq 120\}$ ✓

e) U: "Número de hijos que debe tener una pareja hasta tener 3 mujeres, siendo su tope 8 hijos"

$R(U) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ✓

f) V: "Cant. de meses del año que una fábrica excede los límites permitidos de contaminación ambiental"

$R(V) = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \leq 12\}$ ✓

g) W: "Cant. de dinero que se puede extraer sacando 3 monedas de una caja que tiene 2 de 50 ctvs., 3 de 25 ctv. y 4 de \$1"

$R(W) = \{(1{,}25), (2), (0{,}75), (1), (1{,}50), (1{,}75), (3), (2{,}25), (2{,}50)\}$ ✓

h) X: "Presión de un neumático de un coche que ha sido cargado con 32 libras y medido un día cualquiera"

$R(X) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 32\}$ ✓

NOTA

i) Y = "Número de veces que se debe lanzar al aire una moneda para obtener dos caras o dos cecas consecutivas"

$R(Y) = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 2\}$ ✓

j) Z = "Número de rueda que al recolocarlas al azar en un auto ocupen su posición original"

$R(Z) = \{0, 1, 2, 4\}$ ✓

---

② Se seleccionaron tres estaciones de servicio A, B y C de la ciudad de Bs. As, que cuentan, respectivamente con 5, 3 y 2 surtidores. En estas estaciones no siempre están todos los surtidores en uso. Dar el recorrido de las sig. variables aleatorias:
A: 5 , B: 3 C: 2

a) U: "Número <u>total</u> de surtidores entre las estaciones seleccionadas en uso"

$R(U) = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \leq 10\}$ ✓

b) V: "Número de surtidores en uso de la estación B ; Número de surtidores en uso de la estación C }

$R(X) = \{(x,y) \in \mathbb{N}_0^2 : x \leq 3, y \leq 2\}$ ✓

c) W: "Número de estaciones que tienen exactamente 2 surtidores en uso"

$R(W) = \{0, 1, 2, 3\}$ ✓

d) X = "Diferencia en el número de surtidores en servicio entre la estación A y B"

Se lo pregunté a la profesora, No es diferencia entre ambos, es A − B →

A		B		
0	−	0	=	0
0	−	1	=	−1
0	−	2	=	−2
0	−	3	=	−3
1	−	0	=	1
1	−	1	=	0
1	−	2	=	−1
1	−	3	=	−2 ...

$R(X) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

FECHA 1°c 2019

P2

③ De una caja con 6 bolillas azules y 2 rojas se extraen 3 sin reposición.

Sea: X: "Cantidad de bolillas azules entre las 3 extraídas"

a) Hallar la función de probabilidad puntual de X

$\boxed{6A \quad 2R}$ $R(X) = \{0,1,2,3\}$

$P(X=0) = 0$ no es posible , $P(X=1) = \dfrac{\binom{6}{1}\binom{2}{2}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{6}{56} = \dfrac{3}{28} = 0{,}10714$

$P(X=2) = \dfrac{\binom{6}{2}\binom{2}{1}}{56} = \dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28} = 0{,}53571$

$P(X=3) = \dfrac{\binom{6}{3}}{56} = \dfrac{20}{56} = \dfrac{5}{14} = 0{,}35715$

$$\boxed{\begin{aligned} P(X=0) &= 0 \\ P(X=1) &= \tfrac{3}{28} \\ P(X=2) &= \tfrac{15}{28} \\ P(X=3) &= \tfrac{5}{14} \end{aligned}}$$ ✓

b) Hallar la $E(X)$ y $V(X)$

$E(X) = 1 \cdot \dfrac{3}{28} + 2 \cdot \dfrac{15}{28} + 3 \cdot \dfrac{5}{14} = \boxed{\dfrac{9}{4} = E(X)}$ ✓

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \underset{CA}{=} \dfrac{153}{28} - \dfrac{81}{16} = \boxed{\dfrac{45}{112} = V(X)}$ ✓

CA • $E(X^2) = 1^2 \cdot \dfrac{3}{28} + 2^2 \cdot \dfrac{15}{28} + 3^2 \cdot \dfrac{5}{14} = \dfrac{153}{28} = E(X^2)$

c) Hallar $E(X^2)$, $E\left(\frac{1}{X}\right)$, $E(1/X^2)$ y $V(X^2)$

$\boxed{E(X^2) = \dfrac{153}{28}}$ ✓

$E(1/X) = \dfrac{1}{1}\dfrac{3}{28} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{15}{28} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5}{14} = \boxed{\dfrac{83}{168} = E(1/X)}$ ✓

$E(1/X^2) = \dfrac{1}{1^2}\dfrac{3}{28} + \dfrac{1}{2^2}\dfrac{15}{28} + \dfrac{1}{3^2}\dfrac{5}{14} = \boxed{\dfrac{283}{1008} = E(1/X^2)}$ ✓

$V(X^2) = E(X^4) - E(X^2)^2 = 1053/28 - 23409/784 = \boxed{7{,}7487 = V(X^2)}$ ✓

• $E(X^4) = \dfrac{3}{28} + 2^4 \cdot \dfrac{15}{28} + 3^4 \cdot \dfrac{5}{14} = \dfrac{1053}{28}$

④ Se tienen dos urnas. La urna A tiene 6 bolitas rojas y 4 blancas. La urna B tiene 2 bolitas rojas y 7 blancas. Se extrae una bolita al azar de A y se coloca en B. A continuación se extraen de B CON reposición 2 bolitas.

Sea X: "cantidad de bolitas rojas extraídas de la urna B".

a) Hallar la función de prob. de X

6r 4b		2r 7b
A		B

$R(X) = \{0, 1, 2\}$

r_1: se extrajo, de A, una bola roja
b_1: " " de A, " " blanca

si $r_1 \to$ 3r 7b

si $b_1 \to$ 2r 8b

$P(r_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $\quad P(b_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$$P(X=0) = P(X=0 \mid r_1)\overbrace{P(r_1)}^{3/5} + P(X=0 \mid b_1)\overbrace{P(b_1)}^{2/5} =$$

$$= \frac{7}{10}\,\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{5} + \frac{8}{10}\,\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{11}{20} = P(X=0)}$$

$$\boxed{P(X=1)} = \underbrace{P(X=1 \mid r_1)}_{br+rb}\overbrace{P(r_1)}^{3/5} + \underbrace{P(X=1 \mid b_1)}_{br\ rb}\overbrace{P(b_1)}^{2/5} =$$

$$= P(\underbrace{(rb \cup br)}_{disjunto} \mid r_1)\ 3/5 + P(rb \cup br \mid b_1)\ 2/5 =$$

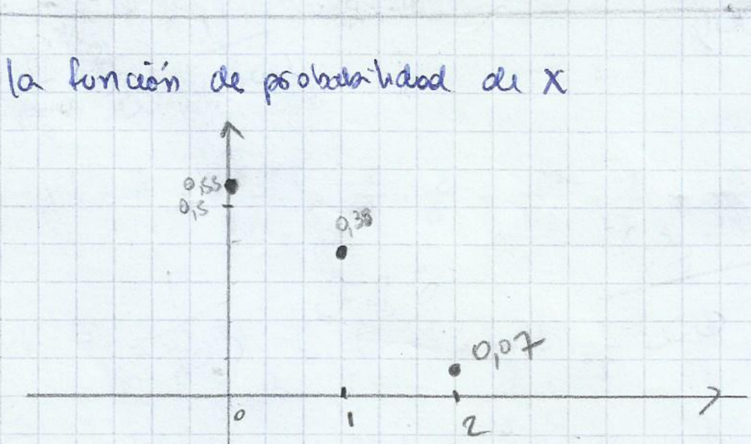
$$= \frac{3}{5}\left(P(rb) \mid r_1) + P((br) \mid r_1)\right) + \frac{2}{5}\left(P(rb \mid b_1) + P(br \mid b_1)\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\underset{1^{\circ}r}{\frac{3}{10}} \underset{2^{\circ}b}{\frac{7}{10}} + \underset{1^{\circ}b}{\frac{7}{10}} \cdot \underset{2^{\circ}r}{\frac{3}{10}}\right) + \frac{2}{5}\left(\underset{1^{\circ}r}{\frac{2}{10}} \cdot \underset{2^{\circ}b}{\frac{8}{10}} + \underset{1^{\circ}b}{\frac{8}{10}} \cdot \underset{2^{\circ}r}{\frac{2}{10}}\right) = \frac{19}{50} = \boxed{0{,}38}$$

$$P(X=2) = \underbrace{P(X=2 \mid r_1)}_{1^{\circ}r,\,2^{\circ}r}\overbrace{P(r_1)}^{3/5} + \underbrace{P(X=2 \mid b_1)}_{1^{\circ}r,\,2^{\circ}r}\overbrace{P(b_1)}^{2/5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{7}{100} = 0{,}07$$

$$\boxed{P(X=0) = 0{,}55 \quad P(X=1) = 0{,}38 \quad P(X=2) = 0{,}07}$$ ✓

b) Graficar la función de probabilidad de X



NOTA

HOJA N°

FECHA 1°c 2019

P2

b) Repetir a) pero considerando SIN reposición

| 6r 4b | (A) | 2r 7b | (B)

Si Ar $\rightarrow$ B: 3r 7b

Si Ab $\rightarrow$ B: 2r 8b

Ar: se extrajo una bola roja de A $\rightarrow P(Ar) = 3/5$

Ab: " " " " blanca de A $\rightarrow P(Ab) = 2/5$

RB: de la urna B se extrajo 1° una bola roja y 2° una blanca

BR: " " " " " 1° " " blanca y 2° una roja

BB: " " " " " 1° " " blanca y 2° una blanca

RR: " " " " " 1° " " roja y 2° una roja.

$R(X) = \{0, 1, 2\}$

$$P(X=0) = P(\underset{1°b\,2°b}{X=0} \mid Ar)\overbrace{P(Ar)}^{3/5} + P(\underset{1°b\,2°b}{X=0} \mid Ab)\overbrace{P(Ab)}^{2/5} =$$

$$= \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{5} + \frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{5} = \frac{119}{225} \longrightarrow \boxed{P(X=0) = 0{,}5289}$$

$$P(X=1) = P(\underset{\substack{1°r\,2°b \,\cup\, 1°b\,2°r \\ \text{disjuntos}}}{X=1} \mid Ar)\overbrace{P(Ar)}^{3/5} + P(X=1 \mid Ab)\overbrace{P(Ab)}^{2/5} =$$

$$= \left(\underset{1°r}{\frac{3}{10}}\cdot\underset{2°b}{\frac{7}{9}} + \underset{1°b}{\frac{7}{10}}\,\underset{2°r}{\frac{3}{9}}\right)\cdot\frac{3}{5} + \left(\underset{1°r}{\frac{2}{10}}\cdot\underset{2°b}{\frac{8}{9}} + \underset{1°b}{\frac{8}{10}}\,\underset{2°r}{\frac{2}{9}}\right)\cdot\frac{2}{5} =$$

$$= \frac{7}{15}\cdot\frac{3}{5} + \frac{16}{45}\cdot\frac{2}{5} = \frac{19}{45} \longrightarrow \boxed{P(X=1) = 0{,}4222}$$

$$P(X=2) = P(\underset{1°r\,2°r}{X=2} \mid Ar)\overbrace{P(Ar)}^{3/5} + P(\underset{1°r\,2°r}{X=2} \mid Ab)\overbrace{P(Ab)}^{2/5} =$$

$$= \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{5} = \frac{11}{225} \rightarrow \boxed{P(X=2) = 0{,}0489}$$

NOTA

⑤ Sea X = número de neumáticos de un automóvil, seleccionado al azar, que tenga baja la presión.

a) ¿Cuál de las sig. tres funciones $p_i(x)$ es una función de probabilidad puntual para X?

x	0	1	2	3	4	Σ
$p_1(x)$	0,20	0,30	0,10	0,07	0,03	0,7
⇒ $p_2(x)$	0,40	0,10	0,10	0,10	0,30	1,0
$p_3(x)$	0,40	0,15	0,10	0,15	0,30	1,1

$R(x) = \{0,1,2,3,4\} \rightarrow p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1$

solo lo cumple $p_2(x)$

$$\boxed{p(x) = p_2(x)}$$

b) Obtener la función de distribución acumulada de X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,4 & 0 \leq x < 1 \\ 0,5 & 1 \leq x < 2 \\ 0,6 & 2 \leq x < 3 \\ 0,7 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

$p(0)$
$p(0)+p(1)$
$p(0)+p(1)+p(2)$
$p(0)+p(1)+p(2)+p(3)$
$p(0)+p(1)+p(2)+p(3)$

c) Con la función de distribución de prob. seleccionada en a), calcular: $P(2<x<4)$, $P(X<2)$ y $P(X \neq 0)$

$P(2<X<4) = P(X\leq 3) - P(X \leq 2) = \underbrace{p(0)+p(1)+p(2)+p(3)}_{P(X\leq 3)} - \underbrace{(p(0)+p(1)+p(2))}_{P(X\leq 2)} =$

$= 0,7 - 0,6 = \boxed{0,1 = P(2<x<4)}$ ✓

$P(X<2) = P(X\leq 1) = p(0)+p(1) = \boxed{0,5 = P(X<2)}$ ✓

$P(X\neq 0) = P(X>0) = 1 - P(X\leq 0) = 1 - 0,40 = \boxed{0,6 = P(X\neq 0)}$ ✓

d) Si $p(x) = k(5-x)$ para $x = 0,1,2,3,4$ ¿cuál debe ser el valor de k para que p sea una función de probabilidad?

$p(0) = 5k$, $p(1) = 4k$, $p(2) = 3k$, $p(3) = 2k$, $p(4) = k$

$\sum_{i=0}^{i=4} p(i) = 1 \rightarrow 1 = 5k + 4k + 3k + 2k + k = k(5+4+3+2+1) = 15k$

$1 = 15k \rightarrow \boxed{k = 1/15}$ ✓

P2

1°c 2019

⑥ La sig. distribución de probabilidad corresponde a la v.a. X.

X: "cantidad de llegadas tardes a la clase de P y E en marzo de un alumno al azar"

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	$0{,}3+k$	$2k$	$0{,}2$	$0{,}1+5k^2$	$0{,}05$

a) Hallar el valor de k

$$p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=1=0{,}3+k+2k+0{,}2+0{,}1+5k^2+0{,}05$$

$$7/20 = 3k+5k^2$$

$$5k^2+3k-\frac{7}{20}=0 \longrightarrow k_1=\frac{1}{10} \quad \cancel{k=-\frac{7}{10}} \quad k>0$$

$$\boxed{k=1/10}$$ ✓

b) Calcular la prob. de que las tardanzas de un alumno elegido al azar sean 3

$$P(X=3) = p(3) = 0{,}1+5\cdot\frac{1}{10^2} = \frac{3}{20} \qquad \boxed{P(X=3)=0{,}15}$$ ✓

c) Hallar el número más probable de tardanzas. ¿Coincide con el valor esperado de tardanzas?

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}4 & \text{si } x=0 \\ 0{,}2 & \text{si } x=1 \\ 0{,}2 & \text{si } x=2 \\ 0{,}15 & \text{si } x=3 \\ 0{,}05 & \text{si } x=4 \end{cases}$$

← el más alto

el número más probable de tardanzas es en $x=0 \rightarrow T=0$

$$E(X) = 0\cdot0{,}4 + 1\times0{,}2 + 2\times0{,}2 + 3\times0{,}15 + 4\times0{,}05 = 1{,}25 = E(X)$$

$$\boxed{E(X) \neq T} \rightarrow \text{NO coincide}$$ ✓

7) En una fábrica se producen cadenas con 15, 25, 30 o 40 eslabones en proporciones 2 : 3 : 4 : 6. Se vuelca toda la producción en una sola cinta transportadora. Se eligen de la cinta al azar dos cadenas con reposición.

$\frac{2}{15}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{6}{15}$

Se definen las r.a. X: "promedio de eslabones de las cadenas elegidas"
Y: "long. máx. de las cadenas elegidas".

Determinar su recorrido

$R(X) = \{15, 20, 22.5, 27.5, 25, 32.5, 30, 35, 40\}$ $\quad R(Y) = \{15, 25, 30, 40\}$

15;15 · 15;25 · 15;30 · 15;40 · 25;30 · 25;25 · 25;40 · 30;30 · 30;40 · 40;40

2 3 4 6 / 15 25 30 40

a) Hallar la función de probabilidad puntual de c/u de las variables

X:

$P(15) = \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} = \boxed{\frac{4}{225} = P(15)}$ ✓; $P(20) = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} = \boxed{\frac{12}{225} = P(20)}$ ✓

$P(22.5) = 2\left(\frac{2}{15} \cdot \frac{4}{15}\right) = \boxed{\frac{16}{225} = P(22.5)}$; $P(27.5) = 2\left(\frac{2}{15} \cdot \frac{6}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{4}{15}\right) = \boxed{\frac{48}{225} = P(27.5)}$ ✓

(de 15, de 40, 25, 30)

$P(25) = \left(\frac{3}{15} \cdot \frac{3}{15}\right) = \boxed{\frac{9}{225} = P(25)}$ ✓; $P(32.5) = 2\left(\frac{3}{15} \cdot \frac{6}{15}\right) = \boxed{\frac{36}{225} = P(32.5)}$ ✓

$\boxed{P(30) = \frac{16}{225}}$ ✓; $P(35) = 2\left(\frac{4 \cdot 6}{15 \cdot 15}\right) = \boxed{\frac{48}{225} = P(35)}$ ✓; $\boxed{P(40) = \frac{36}{225}}$ ✓

Y:

$P(15) = \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} = \boxed{\frac{4}{225} = P(15)}$ ✓; $P(25) = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{3}{15} = \boxed{\frac{21}{225} = P(25)}$ ✓

$P(30) = \frac{2}{15} \cdot \frac{4}{15} + \frac{4}{15} \cdot \frac{2}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{4}{15} + \frac{4 \cdot 3}{15 \cdot 15} + \frac{4 \cdot 4}{15 \cdot 15} = \boxed{\frac{56}{225} = P(30)}$ ✓

$P(40) = \frac{36}{225} + 2\left(\frac{2 \cdot 6}{225} + \frac{3 \cdot 6}{225} + \frac{4 \cdot 6}{225}\right) = \boxed{\frac{144}{225} = P(40)}$ ✓

b) Calcular el valor esperado y la varianza de ambas variables

$E(X) = 15 \cdot \frac{4}{225} + 20 \cdot \frac{12}{225} + 22.5 \cdot \frac{16}{225} + 27.5 \cdot \frac{48}{225} + 25 \cdot \frac{9}{225} + 32.5 \frac{36}{225} +$

$+ 30 \cdot \frac{16}{225} + 35 \cdot \frac{48}{225} + 40 \cdot \frac{36}{225} = \frac{6975}{225} = \boxed{31 = E(X)}$ ✓

$E(X^2) = 998 \rightarrow V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 998 - 31^2 = \boxed{37 = V(X)}$ ✓

$E(Y) = 15 \cdot \frac{4}{225} + 25 \cdot \frac{21}{225} + 30 \cdot \frac{56}{225} + 40 \cdot \frac{144}{225} = \boxed{\frac{107}{3} = E(Y)}$ ✗

$E(Y^2) = 1310{,}33 \rightarrow V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \boxed{38{,}22 = V(Y)}$ ✓

NOTA

HOJA N°

FECHA 1°c 2019

P2

(8) Sea X la capacidad (en kg) de un lavarropas comprado por el próximo cliente que elige la marca Cándida.

La función de prob. puntual de X está dada por:

x_i	5	7,5	10
$p(x_i)$	0,25	0,45	0,30

a) Calcular el valor esperado y la varianza de la variable X

$E(X) = 5 \cdot p(5) + 7,5\, p(7,5) + 10\, p(10) =$

$= 5 \cdot 0,25 + 7,5 \cdot 0,45 + 10 \cdot 0,30 = \boxed{7,625 = E(X)}$ ✓

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{985}{16} - \left(\frac{61}{8}\right)^2 = \boxed{3,4219 = V(X)}$ ✓

• $E(X^2) = 5^2 \cdot 0,25 + (7,5)^2 \cdot 0,45 + 10^2 \cdot 0,30 = \frac{985}{16} = E(X^2)$

b) Si el precio del lavarropas es $Y = 20X - 7,5$, hallar el valor esperado y el desvío estándard del precio del lav. Cándida

$E(Y) = E(20X - 7,5) = E(20X) - E(7,5) =$

$= 20\, E(X) - 7,5 = 20 \cdot 7,625 - 7,5 = 145$

$\boxed{E(Y) = 145}$ ✓

$E(Y^2) = E((20X - 7,5)^2) = E(20^2 x^2 - 300X + 56,25) =$

$= 20^2\, E(X^2) - 300\, E(X) + E(56,25) =$

$= 400 \cdot \frac{985}{16} - 300 \cdot \frac{61}{8} + \frac{225}{4} = \boxed{22393,75 = E(Y^2)}$

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 22393,75 - 145^2 = 1368,75$

$\sigma = \sqrt{V(x)} \cong 37$ $\boxed{\sigma_Y \cong 37}$ ✓

NOTA

⑨ La cadena de gimnasios Sportos ofrece a sus socios un plan anual con opciones de pago. Para un socio seleccionado al azar, sea X = número de meses para pagar el plan.

La función de distribución acumulada de X es:

$$F_{(x)} = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0{,}1 & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}4 & 2 \leq x < 3 \\ 0{,}6 & 3 \leq x < 6 \\ 0{,}9 & 6 \leq x < 12 \\ 1 & x \geq 12 \end{cases}$$

Utilizando la función de distribución, calcular las sig. probs.:

a) • $P(X<3) = P(X \leq 3) = F_{(3)} = \boxed{0{,}6 = P(X<3)}$ ✓

• $P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \underbrace{F_{(2)}}_{P(X\leq 2)} = 1 - 0{,}4 = \boxed{0{,}6 = P(X>2)}$ ✓

• $P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X<3) = F(6) - F(2) = 0{,}9 - 0{,}4 =$

$= \boxed{P(3 \leq X \leq 6) = 0{,}5}$ ✓

• $P(3 < X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = F(6) - F(3) = 0{,}9 - 0{,}6 = 0{,}3$

$\boxed{P(3 < X \leq 6) = 0{,}3}$ ✓

b) $P(X<6 \mid X \geq 3) = \dfrac{P[(X<6) \cap (X \geq 3)]}{P\, X \geq 3} = \dfrac{P(3 \leq X < 6)}{1 - P(X<3)} =$

$= \dfrac{P(X<6) - P(X<3)}{1 - P(X \leq 2)} = \dfrac{P(X \leq 3) - P(X \leq 2)}{1 - P(X \leq 2)} =$

$= \dfrac{F(3) - F(2)}{1 - F(2)} = \dfrac{0{,}6 - 0{,}4}{1 - 0{,}4} = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \dfrac{1}{3}$

$\boxed{P(X<6 \mid X \geq 3) = 1/3}$ ✓

HOJA N°

FECHA 1º 2019

P2

(10) Las máquinas tejedoras en una fábrica de elásticos utilizan rayo láser para detectar los hilos rotos. Cuando se detecta un hilo roto se detiene la máq. tejedora. Consideremos la v.a. X: "Cantidad de veces que se detiene la máq. por día". La función de probabilidad de X está dada por:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{16}{31}\left(\frac{1}{2}\right)^x & x = 0,1,2,3,4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la prob. de que un día dado se detenga la máq.?

$$P(0 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 0) = P(X \leq 4) - P(X = 0) =$$

$$= p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = \frac{16}{31}\left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) =$$

$$= \frac{16}{31} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{31} \qquad \boxed{P(0 < X \leq 4) = 15/31} ✓$$

b) Si las detenciones en dos días consecutivos son independientes, hallar la prob. de que el máximo de detenciones entre las del lunes y las del martes sea exactamente de 2 veces

Y: "cant. MÁXIMA de detenciones entre las del lunes y el martes"

$$P(Y=2) = P[(X_L=0 \cap X_M=2) \cup (X_L=1 \cap X_M=2) \cup (X_L=2 \cap X_M=2) \cup (X_L=2 \cap X_M=0) \cup (X_L=2 \cap X_M=1)] =$$

$$= P(X_L=0)P(X_M=2) + P(X_L=1)P(X_M=2) + P(X_L=2)P(X_M=2) + P(X_L=2)P(X_M=0) + P(X_L=2)P(X_M=1)$$

$$P(X=x) = p(x) \rightarrow P(X_L=0) = P(X_M=0) = p(0) = 16/31$$

$$P(X_L=1) = P(X_M=1) = p(1) = 8/31$$

$$P(X_L=2) = P(X_M=2) = p(2) = 4/31$$

$$P(Y=2) = \frac{16}{31} \cdot \frac{4}{31} + \frac{8}{31} \cdot \frac{4}{31} + \frac{4}{31} \cdot \frac{4}{31} + \frac{4}{31} \cdot \frac{16}{31} + \frac{4}{31} \cdot \frac{8}{31} = \frac{208}{961} = \boxed{0{,}2164 = P(Y=2)} ✓$$

c) Hallar la función de prob. puntual del número máximo de detenciones por día considerando lunes y martes

$$P(X_L=3) = P(X_M=3) = 2/31$$

$$P(X_L=4) = P(X_M=4) = 1/31$$

$$P(Y=0) = P(X_L=0 \cap X_M=0) = P(X_L=0) \cdot P(X_M=0) = 16^2/31^2 = 256/961 = P(Y=0)$$

NOTA

$0 \to 16/31 \quad 1 \to 8/31 \quad 2 \to 4/31 \quad 3 \to 2/31 \quad 4 \to 1/31$

$$P(Y=1) = P[(X_L=1 \cap X_M=0) \cup (X_L=1 \cap X_M=1) \cup (X_L=0 \cap X_M=1)] =$$
$$= P(X_L=1)\,P(X_M=0) + P(X_L=1)\cdot P(X_M=1) + P(X_L=0)\,P(X_M=1) =$$
$$= \frac{8}{31}\cdot\frac{16}{31} + \frac{8}{31}\cdot\frac{8}{31} + \frac{16}{31}\cdot\frac{8}{31} = \boxed{\frac{320}{961} = P(Y=1)}$$

$$P(Y=2) \overset{\downarrow b)}{=} \frac{208}{961}$$

$$P(Y=3) = P[(X_L=0 \cap X_M=3) \cup (X_L=1 \cap X_M=3) \cup (X_L=2 \cap X_M=3) \cup (X_L=3 \cap X_M=3) \cup$$
$$\cup (X_L=3 \cap X_M=2) \cup (X_L=3 \cap X_M=1) \cup (X_L=3 \cap X_M=0)] =$$
$$= P(X_L=0)\,P(X_M=3) + P(X_L=1)\cdot P(X_M=3) + P(X_L=2)\,P(X_M=3) + P(X_L=3)\,P(X_M=3) +$$
$$+ P(X_L=3)\,P(X_M=2) + P(X_L=3)\,P(X_M=1) + P(X_L=3)\,P(X_M=0) =$$

$$\boxed{\underbrace{P(X_L=3)=P(X_M=3)}_{P(X=3)}}$$

$$= P(X=3)\left(2P(X=0) + 2P(X=1) + 2P(X=2) + P(X=3)\right) =$$
$$= \frac{2}{31}\left(2\cdot\frac{16}{31} + 2\cdot\frac{8}{31} + 2\cdot\frac{4}{31} + \frac{2}{31}\right) = \frac{2}{31}\cdot\frac{58}{31} = \frac{116}{961}$$

$$\boxed{P(Y=3) = \frac{116}{961}}$$

$$P(Y=4) = P(X=4)\left[2P(X=0) + 2P(X=1) + 2P(X=2) + 2P(X=3) + P(X=4)\right] =$$
$$= \frac{1}{31}\left(2\cdot\frac{16}{31} + 2\cdot\frac{8}{31} + 2\cdot\frac{4}{31} + 2\cdot\frac{2}{31} + \frac{1}{31}\right) =$$
$$= \frac{1}{31}\cdot\left(\frac{61}{31}\right) = \boxed{\frac{61}{961} = P(Y=4)}$$

Y	0	1	2	3	4
P(y)	256/961	320/961	208/961	116/961	61/961

NOTA

HOJA Nº

FECHA 1º 2019

P2

(11) Un fabricante de automóviles tiene un programa de control de calidad que incluyen la inspección de materiales recibidos para verificar que no tengan defectos. Supongamos que recibe las cajas de cambio para los automóviles en lotes de 5 unidades. Se seleccionan al azar dos cajas de un lote para inspeccionarlas para decidir si son defectuosas o no.

a) Describir el espacio muestral asociado a este experimento

B: "se seleccionó una caja Buena" $B = D^c$
D: " " " " Defectuosa"

$\Omega = \{(B,B), (B,D), (D,D), (D,B)\}$ ✓

b) Supongamos que el lote tiene 2 cajas Defectuosas y definamos la v.a. W: "número de cajas defectuosas seleccionadas". Hallar las funciones de prob. y distribución de la variable W.

| B B B D D |

$R(W) = \{0, 1, 2\}$

$P(W=0) = P(BB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P(W=1) = P((BD) \cup (DB)) = P(BD) + P(DB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$P(W=2) = P(DD) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$$\boxed{P(x) = \begin{cases} 3/10 & x = 0 \\ 3/5 & x = 1 \\ 1/10 & x = 2 \end{cases}}$$ ✓

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3/10 & 0 \leq x < 1 \\ 9/10 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}}$$

c) Hallar el valor esperado, el valor mediano y el valor más probable de la variable W

- $E(X) = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{10} = \boxed{\frac{4}{5} = E(X)}$ ✓

- Valor más probable para X ($\to$ x : p(x) es mayor)

$p(x)\ máx = 3/5 \to p(1) \to \boxed{V\ más\ prob = 1}$ ✓ x=1

NOTA

(12) La cantidad de veces que se usa en la fábrica, una herramienta por día para reparar ciertos equipos puede modelarse mediante una variable que tiene la sig. función de probabilidad:

$$P(x) = \frac{c}{(x+1)},$$

siendo el recorrido de la variable $R(x) = \{0, 1, 2, 3\}$

a) Hallar el valor de la constante c

$$P(0) = \frac{c}{1}, \quad P(1) = \frac{c}{2}, \quad P(2) = \frac{c}{3}, \quad P(3) = \frac{c}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{i=3} P(i) = 1 \rightarrow 1 = c + \frac{c}{2} + \frac{c}{3} + \frac{c}{4} = \frac{25c}{12} = 1$$

$$\boxed{c = 12/25}$$

b) si esta herramienta se alquila a \$100 cada vez que se usa, hallar el valor esperado del costo de alquiler mensual (20 días hábiles)

Y: "valor del alquiler mensual de la herramienta"

$$Y = (100\,X)\overset{\text{x día}}{}\cdot 20 \longrightarrow Y = 2000X$$

$$P(0) = \frac{12}{25} \quad P(1) = \frac{6}{25} \quad P(2) = \frac{4}{25} \quad P(3) = \frac{3}{25}$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{12}{25} + 1 \cdot \frac{6}{25} + 2 \cdot \frac{4}{25} + 3 \cdot \frac{3}{25} = \frac{23}{25}$$

$$E(Y) = E(2000X) = 2000\,E(X) = 2000 \cdot \frac{23}{25} = 1840$$

$$\boxed{E(Y) = 1840}$$

HOJA N°

FECHA

PyE guía 2019

(13) La demanda semanal de taladros en cierto local comercial de la localidad "Arroyo Seco" sigue la siguiente función de distribución de Probabilidades:

X	0	1	2	3	4
F(X)	0.2	0,55	0,8	0,95	1

Cada taladro vendido origina una ganancia de $350, pero los que no se venden originan una pérdida de $80 por unidad.

¿Cuántos taladros convendría disponer en stock para maximizar el beneficio semanal esperado?

Función de probabilidades

X	0	1	2	3	4
p(X)	0,2	0,35	0,25	0,15	0,05

i es la cantidad de taladros en stock y x es la # de taladros vendidos

g_i es la función "ganancia" según stock

$G(X=x|S=0)$
$$g_0(x) = 0 \quad \forall x$$

$G(X=x|S=1)$
$$g_1(x) = \begin{cases} 350 & \text{si } x=1 \\ -80 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$G(X=x|S=2)$
$$g_2(x) = \begin{cases} 700 & \text{si } x=2 \\ 270 & \text{si } x=1 \\ -160 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$G(X=x|S=3)$
$$g_3(x) = \begin{cases} 1050 & \text{si } x=3 \\ 620 & \text{si } x=2 \\ 190 & \text{si } x=1 \\ -240 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$G(X=x|S=4)$
$$g_4(x) = \begin{cases} 1400 & \text{si } x=4 \\ 970 & \text{si } x=3 \\ 540 & \text{si } x=2 \\ 110 & \text{si } x=1 \\ -320 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$G(X=x|S=$

Y_i : ganancia obtenida con i taladros en stock $\rightarrow$ $\boxed{E(Y_i) = \sum_{x=0}^{i} g_i(x)\, p(x)}$

S : cantidad de taladros en stock

G(

$$E(Y_0) = \overset{0}{g_0(0)}\, \overset{0,2}{p(0)} = \boxed{0 = E(Y_0)} \qquad E(Y|S=0)$$

$$E(Y_1) = \overset{-80}{g_1(0)}\, p(0) + \overset{350}{g_1(1)}\, p(1) = \boxed{106,50 = E(Y_1)} \qquad E(Y|S=1)$$

$$E(Y_2) = \overset{-160}{g_2(0)}\, \overset{0,2}{p(0)} + \overset{270}{g_2(1)}\, \overset{0,35}{p(1)} + \overset{700}{g_2(2)}\, p(2) = \boxed{237,50 = E(Y_2)}$$

$$E(Y_3) = \overset{-240}{g_3(0)}\, p(0) + \overset{190}{g_3(1)}\, \underset{0,35}{p(1)} + \overset{620}{g_3(2)}\, \overset{0,25}{p(2)} + \overset{1050}{g_3(3)}\, \underset{0,15}{p(3)} = \boxed{331 = E(Y_3)}$$

$$E(Y_4) = \underset{-320}{g_4(0)}\, \overset{0,2}{p(0)} + \underset{110}{g_4(1)}\, p(1) + \underset{540}{g_4(2)}\, \underset{0,25}{p(2)} + \underset{970}{g_4(3)}\, p(3) + \underset{1400}{g_4(4)}\, \underset{0,05}{p(4)} = \boxed{325 = E(Y_4)}$$

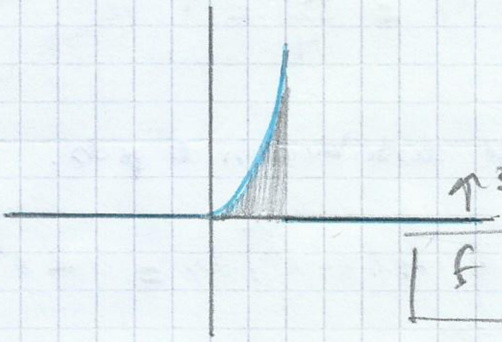
Con 3 taladros la esperanza de la ganancia es mayor

NOTA

(14) Indicar cuál/es de las sig. son funciones de densidad de probabilidad.

a) $f(x) = 3x^2$ si $0 \leq x \leq 1$, $f(x)=0$ en otro caso

$\int f(x)\,d(x) = 1$? $\rightarrow \int_0^1 3x^2\,dx = 1$ ✓



$\boxed{f \text{ es función de densidad}}$

b) $f(x) = 3e^{-\frac{x}{3}}$ si $x > 0$, $f(x)=0$ en otro caso

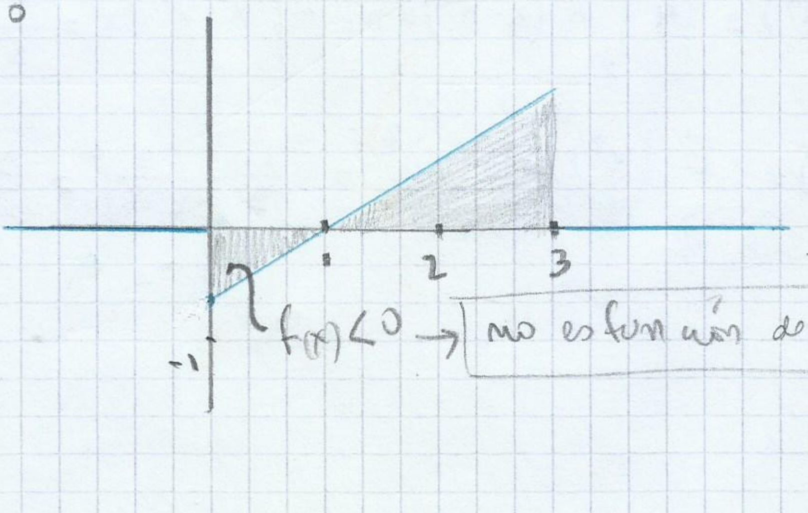
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{\infty} 3e^{-\frac{x}{3}}\,dx = 3(-3)\,e^{-\frac{x}{3}}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= -9\Big(\underbrace{e^{-\frac{\infty}{3}}}_{\to 0} - \overbrace{e^{0}}^{1}\Big) = 9 \neq 1 \therefore$$

$\boxed{f \text{ NO es función de densidad}}$

c) $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)$ si $0 \leq x \leq 3$, $f(x)=0$ en otro caso

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^3 \frac{2}{3}(x-1)\,dx = 1$ ✓



$f(x) < 0 \rightarrow$ $\boxed{\text{no es función de densidad}}$

⑮ El porcentaje de fallas de una producción industrial está dado por la v.a...

$$f(x) = \begin{cases} a(x-x^3) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar el valor de a.

para que sea f. de dens.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = a\int_0^1 x - x^3\,dx = \frac{a}{4} = 1 \rightarrow \boxed{a = 4}$$

$f(x) = 4(x-x^3)$ si $0 < x \leq 1$
$= 0$ en otro caso

b) Hallar la función de distribución de prob.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 4(x-x^3)\,dx = 2x^2 - x^4 = F(x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^2 - x^4 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

c) Hallar el valor esperado y la varianza

X: "porcentaje de fallas de una producción industrial".

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 4(x-x^3)\,dx = 4\int_0^1 x^2 - x^4\,dx = \frac{8}{15}$$

$$\boxed{E(X) = 8/15}$$

$$E(X^2) = 4\int_0^1 x^2(x-x^3)\,dx = 4\int_0^1 x^3 - x^5\,dx = \frac{1}{3} = E(X^2)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = 0{,}0488 = \boxed{\frac{11}{225} = V(X)}$$

16 Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{72}(x+1)^2 & \text{si } -1 \leq x \leq m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar el número real $m>0$ para que $f(x)$ sea la función de densidad de una variable aleatoria X.

$\frac{1}{72}(x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in [-1, m]$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{m} \frac{1}{72}(\overbrace{x+1)^2}^{x^2+2x+1} dx = \frac{1}{72} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x + c\right)\Bigg|_{-1}^{m} =$$

$$= \frac{1}{72}\left[\frac{m^3}{3} + m^2 + m - \left(\frac{-1}{3} + 1 - 1\right)\right] = \frac{1}{72}\left(\frac{m^3+3m^2+3m+1}{3}\right) =$$

$$= \frac{m^3+3m^2+3m+1}{216} = 1 \rightarrow m^3+3m^2+3m+1 = 216$$

$$\xrightarrow{m \geq 0} \boxed{m = 5} \checkmark$$

b) Hallar la función de distribución acumulada de X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^3+3x^2+3x+1}{216} & \text{si } -1 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \checkmark \quad \frac{(x+1)^3}{216}$$

c) Utilizando la función calculada, hallar:

$$P(-1 \leq x < 3) = P(x<3) - P(x<-1) = P(x \leq 3) - P(x \leq -1) =$$

$$= \frac{8}{27} - 0 \longrightarrow \boxed{P(-1 \leq x < 3) = 8/27} \checkmark$$

$$P(-1 < x < 3) = P(x<3) - P(x \leq -1) = P(x \leq 3) - P(x \leq -1)$$

$$\rightarrow \boxed{P(-1 < X < 3) = 8/27} \checkmark$$

d) Calcular el percentil 75 o tercer cuartil de la variable

$$P(X \leq q) = \int_{-\infty}^{q} f(x)\,dx = \frac{75}{100} = \left.\frac{(x+1)^3}{216}\right|_{\infty}^{q} =$$

$$= \frac{(q+1)^3}{216} = \frac{75}{100} \rightarrow 100(q+1)^3 = 16200$$

$$q+1 = \sqrt[3]{162}$$

$$\boxed{q \simeq 1{,}289}$$ ✓

e) Calcular la función de densidad de la v.a. $Y = 2X+1$ y su valor mediano

$$y = 2x+1 \rightarrow x = \frac{y-1}{2} \xrightarrow{\text{derivo m.a.m}} dy = 2dx \rightarrow dx = \frac{dy}{2}$$

$$F(x) = \int_{-1}^{5} f(x)\,dx =$$

$$-1 \leq x \leq 5$$
$$2(-1) \leq 2x \leq 2 \cdot 5$$
$$2(-1)+1 \leq 2x+1 \leq 10+1$$
$$-1 \leq \underbrace{2x+1}_{y} \leq 11$$

c.v.

$$= \int_{-1}^{11} f\left(\frac{y-1}{2}\right) \cdot \overset{dx}{\frac{dy}{2}} =$$

$$= \int_{-1}^{11} \frac{1}{72}\left(\frac{y-1}{2}+1\right)^2 \frac{dy}{2} = \int_{-1}^{11} \frac{1}{144}\left(\frac{y-1+2}{2}\right)^2 dy = \int_{-1} \underbrace{\frac{1}{576}(y+1)^2}_{g(y)} dy$$

$$\boxed{g(y) = \begin{cases} \frac{1}{576}(y+1)^2 & \text{si } -1 \leq y \leq 11 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}}$$ ✓

Valor mediano → Percentil 50 →

$$P(Y \leq q) = \int_{-\infty}^{q} g(y)\,dy = \int_{-1}^{q} \frac{(y+1)^2}{576}\,dy = \frac{1}{576} \cdot \left.\frac{(y+1)^3}{3}\right|_{-1}^{q} = \frac{50}{100}$$

$$\frac{1}{1.728}(q+1)^3 = \frac{50}{100} \rightarrow (q+1)^3 = 864 \rightarrow \boxed{q = \sqrt{864} - 1}$$

f)

HOJA N° 4

FECHA

f) Hallar el valor esperado de X y la varianza de Y

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-1}^{5} x \cdot \frac{1}{72} (x+1)^2\, dx \overset{\text{calculadora}}{=} \boxed{\frac{7}{2} = E(X)}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, g(y)\, dy = \int_{-1}^{11} \frac{(y+1)^2}{576} y\, dy = 8 = E(Y)$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, g(y)\, dy = \int_{-1}^{11} y^2 \frac{(y+1)^2}{576}\, dy = \frac{347}{5} = E(Y^2)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{347}{5} - 64 = \boxed{\frac{27}{5} = V(Y)}$$

5,4

NOTA

(17) Sea X una v.a. con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -5c \leq x \leq 5c \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar el valor de la constante c de modo tal que resulte una función de densidad de probabilidad $c \geq 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -5c \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 5c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \begin{matrix} -1 \leq x < 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{matrix}$$

$$F_X(x) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-5c}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{5c} x\,dx = \left.\frac{-x^2}{2}\right|_{-5c}^{0} + \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{5c} =$$

$$= \frac{25c^2}{2} + \frac{25c^2}{2} \rightarrow 25c^2 = 1 \rightarrow \boxed{c = \frac{1}{5}} \checkmark$$

b) Considerar los eventos: $A = \{x : x > -1/2\}$ y $B = \{x : x < 1/2\}$ e indicar si se trata de eventos independientes

$$F_X(x) = \int_{-1}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{t} -x\,dx = \left.\frac{-x^2}{2}\right|_{-1}^{t} = \frac{-t^2}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{si } -1 \leq x < 0$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} 0\,dx}_{0} + \underbrace{\int_{-1}^{0} -x\,dx}_{1/2} + \int_{0}^{t} x\,dx = \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} \quad \text{si } 0 \leq x < 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{(1-x^2)}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{(1+x^2)}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$P(A) = P\left(X > -\tfrac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X \leq -\tfrac{1}{2}\right) = 1 - F\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{8} = \boxed{\frac{5}{8} = P(A)}$$

$$P(B) = P(X < 1/2) \overset{\text{x continuidad}}{=} P(X \leq 1/2) = F(1/2) = \boxed{\frac{5}{8} = P(B)}$$

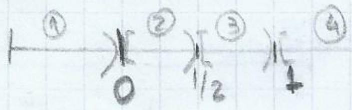
$$P(A \cap B) = P(X > -1/2 \cap X < 1/2) = P(-1/2 < X < 1/2) = P(X < 1/2) - \underbrace{P(X \leq -1/2)}_{F(-1/2)} =$$

$$= \underbrace{P(X \leq 1/2)}_{5/8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} \rightarrow \underbrace{P(A) \cdot P(B)}_{25/64} \neq \underbrace{P(A \cap B)}_{1/4} \quad \boxed{\begin{matrix} \nexists A \text{ y } B \\ \text{no son ind} \end{matrix}}$$

(18) Una empresa fabrica unos componentes eléctricos cuya duración (en años) está dada por una v.a. T, cuya función de densidad es:

$$f_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \frac{1}{2} e^{-(t-1/2)} & \text{si } t > 1/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar la función de distribución acumulada F_T



① $(-\infty, 0) \rightarrow \boxed{F_T(t) = 0}$

② $[0, 1/2) \rightarrow F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f_T(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} f_T(t)\,dt = \int_{0}^{x} 1\,dt = \boxed{x = F_T(x)}$

③ $[1/2, +\infty) \rightarrow F_T(x) = \int_{0}^{1/2} 1\,dt + \int_{1/2}^{x} \frac{1}{2} e^{-(t-1/2)}\,dt =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-e^{-(t-1/2)}\right)\Big|_{1/2}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-e^{-(x-1/2)} - -e^{0}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-(x-1/2)}}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{e^{-(x-1/2)}}{2}$$

$$\boxed{F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 1 - \frac{e^{-(x-1/2)}}{2} & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}}$$ ✓

b) El producto se considera "regular" si dura menos de 3 meses, "bueno" si dura entre 3 meses y 3 años y "muy bueno" si dura más de 3 años. Calcular los % de componentes regulares, buenos y muy buenos de la producción

3 meses

R: $P(X < 1/4) = P(X \leq 1/4) = F(1/4) = 1/4 \rightarrow \boxed{P(X < 1/4) = 1/4}$ ✓

B: $P(1/4 \leq X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X < 1/4) \overset{cont.}{=} P(X \leq 3) - P(X \leq 1/4) =$

$= F(3) - F(1/4) = \boxed{0{,}7089 = P(1/4 \leq X \leq 3)}$ ✓

MB: $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = \boxed{0{,}041 = P(X > 3)}$ ✓

ⓒ Se empaquetan los componentes en cajas de 20 unidades. Si un comprador encuentra en una caja 2 o más artículos "regulares" la fábrica le proporciona una caja nueva en forma ~~total~~ gratuita. Cierto usuario adquirió una caja ¿cuál es la prob. de obtener otra de regalo?

R: # componentes regulares

$$P(R \geq 2) = 1 - P(R < 2) = 1 - P(R=1) - P(R=0)$$

20 NO regulares

$$P(R=0) \overset{\downarrow}{=} (P\ \text{NO REGULARES})^{20} = \underbrace{\text{No Reg}\ \text{No Reg}\ \text{No Reg} \ldots \text{No Reg}\ \text{No Reg}}_{20}$$

$$= 0{,}75^{20} = \boxed{0{,}00317 = P(R=0)}$$

$R=1 \rightarrow \underset{①}{R\ NR\ NR\ NR \ldots NR} + \underset{②}{NR\ R\ NR \ldots NR} \ldots \rightarrow$ 1 Reg 19 No Reg × 20 lugares distintos de R

$$P(R=1) = 0{,}25^1 \times 0{,}75^{19} \times 20 = \boxed{0{,}021 = P(R=1)}$$

$$P(R \geq 2) = 1 - 0{,}00317 - 0{,}021 = \boxed{0{,}9757 = P(R \geq 2)}$$

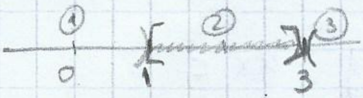
NOTA

P2

(19) Sea X una v.a. con función de densidad $f_{(x)} = \frac{1}{2}(3-x)$ para $1 \le x \le 3$ y 0 en otro caso.

a) Hallar la función de distribución acumulada y graficarla

$$f_{(x)} = \begin{cases} \frac{3-x}{2} & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

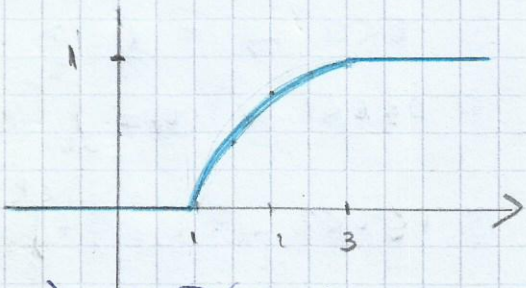


① $F_{(t)} = 0$ si $t \in (-\infty, 1)$

② $1 \le x \le 3 \to F_{(t)} = \int_{-\infty}^{t} f_{(x)}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0\,dx}_{0} + \int_{1}^{t} \frac{3-x}{2}\,dx = \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4}\Big|_1^t =$

$= \frac{3}{2}t - \frac{t^2}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \to F_{(t)} = \frac{3}{2}t - \frac{t^2}{4} - \frac{5}{4} = \frac{6t - t^2 - 5}{4}$

$$\boxed{F_{(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{6t - t^2 - 5}{4} & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}}$$ ✓



b) Determinar r sabiendo que $P(X<r) = 2\,P(X>r)$

$P(X<r) = 2\,P(X>r) = 2\,(1 - P\,X \le r) = 2 - 2P(X \le r)$

x cont. $P(X \le r) = 2 - 2P(X \le r) \to 3\,P(X \le r) = 2 \to P(X \le r) = \frac{2}{3}$

$F(r) = \int_{-\infty}^{r} f_{(x)}\,dx = \int_{1}^{r} \frac{3-x}{2}\,dx = \frac{6x - x^2 - 5}{4}\Big|_1^r = \frac{-r^2 + 6r - 5}{4} = \frac{2}{3}$

$-3r^2 + 18r - 15 = 8 \to -3r^2 + 18r - 23 = 0 \to \boxed{r \cong 1{,}845}$ ✓ $r = 4{,}15 \notin R(X)$

c) Calcular $P\left(X \le \frac{5}{2} \mid 2 \le X \le \frac{7}{2}\right)$

$P(X \le 5/2 \mid 2 \le X \le 7/2) = \frac{P(X \le 5/2 \cap 2 \le X \le 7/2)}{P(2 \le X \le 7/2)} = \frac{P(2 \le X \le 5/2)}{P(2 \le X \le 7/2)}$

• $P(2 \le X \le 5/2) = P(X \le 5/2) - P(X < 2) \overset{cont}{=} P(X \le 5/2) - P(X \le 2) =$

$= F(5/2) - F(2) = 15/16 - 3/4 = \boxed{3/16 = P(2 \le X \le 5/2)}$

• $P(2 \le X \le 7/2) \overset{cont}{=} P\,X \le 7/2) - P(X < 2) = F\underbrace{(7/2)}_{>3} - F_{(2)} = \boxed{1/4 = P(2 \le X \le 7/2)}$

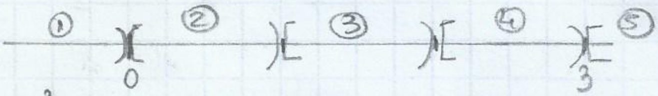
$\to P(X \le \frac{5}{2} \mid 2 \le X \le 7/2) = \frac{3/16}{1/4} = \frac{3}{4}$

$\boxed{P(X \le 5/2 \mid 2 \le X \le 7/2) = 3/4}$ ✓

(20) Sea X una v.a. con función de densidad definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ a & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -ax + 3a & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar la constante a.



$$F_{(x)} = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1} ax\, dx + \int_{1}^{2} a\, dx + \int_{2}^{3} -ax+3a\, dx + \int_{3}^{\infty} 0\, dx =$$

$$= \frac{ax^2}{2}\Big|_0^1 + ax\Big|_1^2 + \left(3ax - \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_2^3 = \frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 2a = 1 \rightarrow \boxed{a = 1/2}$$

b) Hallar la función de distribución acumulada de X y graficarla

① $t < 0 \rightarrow \boxed{F_{(t)} = 0}$

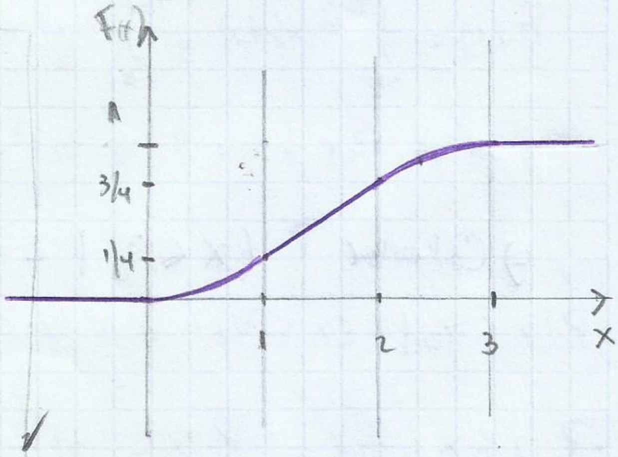
② $0 \leq t < 1 \rightarrow F_{(t)} = \int_{-\infty}^{t} f_{(x)} dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{t} \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^t \rightarrow \boxed{F_{(t)} = \frac{t^2}{4}}$

③ $1 \leq t < 2 \rightarrow F_{(t)} = 0 + \int_{0}^{1} \frac{x}{2} dx + \int_{1}^{t} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{t}{2} - \frac{1}{4} = F_{(t)}}$

④ $2 \leq t < 3 \rightarrow F_{(t)} = 0 + \frac{1}{4} + \overbrace{\int_{1}^{2} \frac{1}{2} dx}^{1/2} + \int_{2}^{t} -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} dx = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_2^t =$

$$= \frac{3}{4} + \left(\frac{3t}{2} - \frac{t^2}{4} - \frac{6}{2} + 1\right) = \boxed{\frac{-t^2 + 6t - 5}{4} = F_{(t)}}$$

$$\boxed{F_{(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ t^2/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ t/2 - 1/4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{-t^2+6t-5}{4} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}}$$



TP2

(24) Sea X una v.a. con función de densidad definida por $f(x)=1$ para $0<x<1$ y 0 en otro caso.
Calcular las funciones densidad de las v.a. $Y=\ln(X)$ y $Z=3X+4$

$$F_{(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx$$

$$y = \ln(x) \rightarrow \underbrace{dy = \frac{1}{x}dx}$$

$$e^y = e^{\ln(x)} \qquad x\,dy = dx$$

$$e^y = x \qquad e^y\,dy = dx$$

$$0<x<1$$

$$\underset{? \to -\infty}{\ln(0)} < \ln(x) < \ln(1)$$

$$\underbrace{-\infty < y < 0}$$

$$y<0$$

$$F_Y(X) = \int_0^1 dx \overset{c.v.}{=} \int_{-\infty}^0 e^y\,dy \rightarrow \boxed{f_y(y) = e^y \text{ si } y<0 \text{, 0 en otro caso}}$$

$$z = 3x+4 \quad , \quad F(x) = \int_0^1 1\,dx \overset{c.v.}{=} \int_1^4 \frac{1}{3}\,dz$$

$$dz = 3dx$$

$$\frac{dz}{3} = dx$$

$$0<x<1$$

$$\times 3 \quad 0<3x<3$$

$$+4 \quad 4<3x+4<3+4$$

$$4<z<7$$

$$\boxed{f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } 4<z<7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}}$$

(21) Sea X una v.a. con función de densidad dada por $f_{(x)} = 3x^2$ para $-1 \leq x \leq 0$ y 0 en caso contrario.
Sea b un número real tal que $-1 < b < 0$. Calcular $P(X>b \mid X<b/2)$

$$P(X>b \mid X<b/2) = \frac{P(X>b \cap X<b/2)}{P(X<b/2)} = \frac{P(b<X<b/2)}{P(X<b/2)} =$$

$$= \frac{P(X<b/2) - P(X\leq b)}{P(X<b/2)} \underset{\text{cont.}}{=} \frac{P(X\leq b/2) - P(X\leq b)}{P(X\leq b/2)}$$

$$\text{si } \overset{①}{-1 \leq t \leq 0} \rightarrow F_{(t)} = \int_{-1}^{t} 3x^2\,dx = x^3 \Big|_{-1}^{t} = \boxed{t^3+1 = F_{(t)} \text{ si } ①}$$

$$\rightarrow P(X>b \mid X<b/2) = \frac{P(X\leq b/2) - P(X\leq b)}{P(X\leq b/2)} = \frac{F(b/2) - F(b)}{F(b/2)} =$$

$$= \frac{(b/2)^3 + 1 - (b^3+1)}{(b/2)^3 - 1} = \frac{b^3/8 + \cancel{1} - b^3 - \cancel{1}}{\frac{b^3}{8} + 1} =$$

$$= \frac{\frac{b^3 - 8b^3}{8}}{\frac{b^3+8}{8}} = \frac{-7b^3}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{8}}{b^3+8} = \boxed{\frac{-7b^3}{b^3+8} = P(X>b \mid X<b/2)} \checkmark$$

(23) El tiempo que tarda un proceso electrónico es una v.a. con media 2hs y varianza $0{,}5hs^2$. El costo del proceso es de \$3 por hora más un costo fijo de \$8. Hallar el costo esperado y su varianza.

X: "tiempo que tarda un proceso electrónico", $E(X) = 2h$ $V(X) = 0{,}5h^2$

Y: "precio total del proceso" $\rightarrow Y = 3X + 8$

$$E(Y) = E(3X+8) = E(3X) + E(8) = 3E(X) + 8 = 3.2 + 8 = 14$$

$$\boxed{E(Y) = 14} \checkmark$$

$$V(Y) = V(3X+8) = V(3X) = 3^2 V(X) = 9 . 0{,}5 = 9/2$$

$$\boxed{V(Y) = 9/2} \checkmark$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

P2

(24) La función de distribución de la demanda de combustible en miles de litro por día X en cierta boca de expendio es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ bx^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ b[2(x-1)+1] & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 1-b(x-4)^2 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$2b(x-1)+b$

a) Hallar la función de densidad de la demanda de combustible.

$$f(x) = \begin{cases} 2bx & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2b & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ -2b(x-4) & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F(x) = \underbrace{\int_0^1 2bx\,dx}_{b} + \underbrace{\int_1^3 2b\,dx}_{4b} + \underbrace{\int_3^4 -2b(x-4)\,dx}_{b} = 6b = 1 \rightarrow \boxed{b = 1/6}$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x/3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/3 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ (4-x)/3 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}}$$ ✓

b) Hallar la demanda superada solo el 20% de los días

$F(x) = 0{,}80$ $\rightarrow$ si $x<1 \rightarrow F(x) = 1/6$

$\rightarrow$ si $1 \leq x < 3 \rightarrow F(x) = 5/6$ $\rightarrow$ 0,80 está entre $1 \leq x < 3$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx}_{1/6} + \int_1^t f(x)\,dx = \frac{1}{6} + \int_1^t \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{6} + \frac{t}{3} - \frac{1}{3} = 0{,}80$$

$$\rightarrow \frac{t}{3} = \frac{29}{30} \rightarrow t = \frac{29}{10}$$

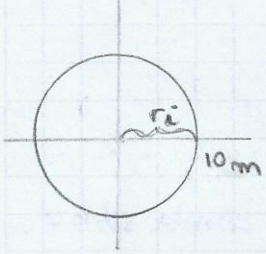
$$\boxed{t = 2{,}90}$$ ✓

NOTA

(25) Un ecologista desea marcar una región circular de muestreo de 10 m. de radio, sin embargo el radio de la región resultante es una v.a. cuya función de densidad está dada por:

$$f(r) = \begin{cases} 3/4\left(1-(10-r)^2\right) & \text{si } 9 \leq r < 11 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar la probabilidad de que el radio difiera del deseado por el ecologista en a lo sumo 30 cm.



r_i = radio ideal
r = radio real

30 cm = 0,30 m

$$P(\underbrace{|r - r_i|}_{\text{distancia entre radio real e ideal}} \leqslant 0{,}30) = ?$$

$$P(|r-10| \leqslant 0{,}30) = P(-0{,}30 \leqslant r - 10 \leqslant 0{,}30) = P(9{,}70 \leqslant r \leqslant 10{,}30) =$$

$$= P(r \leqslant 10{,}30) - P(r < 9{,}70) \overset{\text{cont}}{=} P(r \leq 10{,}30) - P(r \leq 9{,}70) =$$

$$= \int_{9{,}70}^{10{,}30} \frac{3}{4}\left(1-(10-r)^2\right) dr = \frac{3}{4}\int_{9{,}70}^{10{,}30} 1-(10-r)^2 \, dr = \frac{3}{4} \cdot \frac{291}{500} = 0{,}4365$$

$$\boxed{P(|r-10| \leq 0{,}30) = 0{,}4365}$$ ✓

b) ¿Cuál es el área esperada de la región resultante?

$$\text{Área} = \pi r^2$$

$$E(\text{Área}) = E(\pi \cdot r^2) = \pi \, E(r^2) =$$

$$E(r^2) = \int_9^{11} \pi r^2 \cdot \left[\frac{3}{4}\left(1-(10-r)^2\right)\right] dr = \pi \cdot 100{,}2$$

$$\boxed{E\, r^2 = 100{,}2\, \pi}$$ ✓

HOJA N°

FECHA

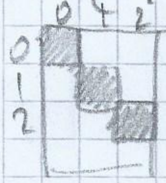
(26) Cierto laboratorio atiende análisis clínicos regulares y de urgencias.

Sea X_1 el número de pacientes que se atiende por un análisis regular en un momento particular del día y X_2 el número de pacientes que demandan atención de urgencia en este mismo tiempo.

Si la función de probabilidad conjunta de X_1 y X_2 está dada por:

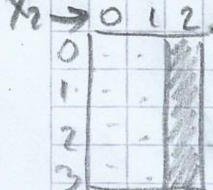
$X_1 \downarrow$ \ $X_2 \rightarrow$	0	1	2
0	0,08	0,07	0,04
1	0,06	0,15	0,09
2	0,05	0,04	0,16
3	0	0,14	0,12

a) Hallar la probabilidad de que el número de pacientes regulares sea igual al número de pacientes de urgencia



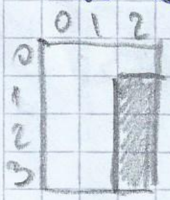
$$P(X_1 = X_2) = P(X_1=0 \wedge X_2=0) + P(X_1=1 \wedge X_2=1) + P(X_1=2 \wedge X_2=2) =$$
$$= 0{,}08 + 0{,}15 + 0{,}16 = 0{,}39$$
$$\boxed{P(X_1 = X_2) = 0{,}39}$$

b) Hallar la probabilidad de que haya EXACTAMENTE dos pacientes de urgencia



$$P(X_2=2) = P(X_1=0 \wedge X_2=2) + P(X_1=1 \wedge X_2=2) + P(X_1=2 \wedge X_2=2) + P(X_1=3 \wedge X_2=2) =$$
$$= 0{,}04 + 0{,}09 + 0{,}16 + 0{,}12 =$$
$$\boxed{P(X_2=2) = 0{,}41}$$

c) Hallar la probabilidad de que haya 2 pacientes de urgencia y AL MENOS uno regular



$$P(X_1 \geq 1 \wedge P X_2 = 2) = \overset{0{,}09}{P(X_1=1 \wedge X_2=2)} + \overset{0{,}16}{P(X_1=2 \wedge X_2=2)} + \overset{0{,}12}{P(X_1=3 \wedge X_2=2)} =$$
$$= P(X_2=0) - P(X_1=0 \wedge X_2=2) =$$
$$0{,}41 - 0{,}04 = 0{,}37$$
$$\boxed{P(X_1 \geq 1 \wedge X_2=2) = 0{,}37}$$

NOTA

d) Hallar las funciones de probabilidad marginales de X_1 y X_2 ¿Son independientes?

$P(X_1=0) = 0{,}08 + 0{,}07 + 0{,}04 = 0{,}19$

$P(X_1=1) = 0{,}06 + 0{,}15 + 0{,}09 = 0{,}30$

$P(X_1=2) = 0{,}05 + 0{,}04 + 0{,}16 = 0{,}25$

$P(X_1=3) = 0 + 0{,}14 + 0{,}12 = 0{,}26$

$P(X_1)$:

X_1	0	1	2	3
P	0,19	0,30	0,25	0,26

$P(X_2=0) = 0{,}08 + 0{,}06 + 0{,}05 + 0 = 0{,}19$

$P(X_2=1) = 0{,}07 + 0{,}15 + 0{,}04 + 0{,}14 = 0{,}40$

$P(X_2=2) = 0{,}04 + 0{,}09 + 0{,}16 + 0{,}12 = 0{,}41$

X_2	0	1	2
P	0,19	0,40	0,41

¿Son independientes?

Analizo si $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$ $\boxed{\forall_{A,B}}$

Tomo el ejemplo de la respuesta de la guía:

$\left.\begin{array}{l} A: X_1 = 1 \\ B: X_2 = 1 \end{array}\right\} \underbrace{P(X_1=1 \cap X_2=1)} \overset{?}{=} P(X_1=1) \cdot P(X_2=1)$

$\longrightarrow 0{,}15 \overset{?}{\neq} 0{,}30 \cdot 0{,}40$

$\underbrace{0{,}15 \neq 0{,}12}$

$\boxed{X_1 \text{ y } X_2 \text{ NO SON INDEPENDIENTES}}$

NOTA